

Estrategia didáctica para cálculo Diferencial utilizando *Software* Dinámico

Adán Ramos Bautista

Edgar Enrique Solís De Los Reyes

Octavio Fonseca Ramos

*Taller de Cómputo, Cibernética y computación,
matemáticas y cálculo diferencial e integral
CCH Azcapotzalco y Vallejo*

Introducción

Históricamente y principalmente en el ciclo bachillerato, el tratamiento del concepto de Límites se ha venido -y aún en éstos tiempos- como un tema complementario o introductorio al concepto de derivada, y no se le otorga la importancia real que esta idea tiene en el Cálculo Diferencial e Integral. Desde siempre se ha dicho que las matemáticas sirven para ordenar las ideas y guiar el correcto pensamiento, evidenciado en buenas ideas para solucionar cualquier situación novedosa o con cierto grado de dificultad: es decir resolver problemas. Los que hemos tenido cierta formación superior al bachillerato, principalmente del área uno: físico-matemática y de las ingenierías, podemos confirmar el gran cúmulo de bondades que las matemáticas aportan a las demás ciencias como una eficaz herramienta, en la solución de problemas específicos del área. Si decimos que las matemáticas están en todas partes es porque éstas estudian cantidades, formas, estructuras y nociones como el espacio, el cambio y lo aleatorio; añadiendo las relaciones y establecimiento de modelos, mediante procesos de abstracción logran establecer resultados aplicables a amplias clases de objetos, lo cual les confiere una generalidad no encontrada en otras disciplinas.

En cuanto al campo curricular, la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, se ofrece en el último año del bachillerato, en algunos sistemas es considerada como asignatura optativa y en otros, como parte del currículum obligatorio. El hecho que esta asignatura se imparta en el último año de la Educación Media Superior supone que el alumno debe de poseer un acervo de conocimientos generales, tales como: Geometría Sintética - comúnmente conocida como Euclidea - Geometría Analítica, en ambos sistemas de referencia: rectangular y polar, trigonometría, álgebra; pero la realidad no resulta ser así.

En el ciclo anterior al bachillerato, es decir en la secundaria se atienden los objetos matemáticos concretos y se prescinde, en general, de las demostraciones¹. La manera de darle el tratamiento en amplitud y la profundidad a los conocimientos, son inferiores a las correspondientes en el bachillerato. Por vez primera el alumno usa sistemáticamente el lenguaje simbólico que inicia el proceso de abstracción, indispensable para los estudios posteriores.

Sin embargo, en el bachillerato los propios contenidos de los cursos obligan a tal articulación, lo cual es de vital importancia en la geometría analítica, que combina álgebra y geometría, y qué decir para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, que como ya se mencionó, es la síntesis de buena parte de lo aprendido en los años anteriores. El curso donde se tenga que ver álgebra será el pilar fundamental para el buen éxito en los otros cursos, debido a la formación e información que proporciona a los alumnos.

¹ Oteiza, Elena, *op.cit.*

Objetivo

Los propósitos de este trabajo no están redactados en términos de objetivos conductuales, pues nos parece que éstos objetivos no permiten alcanzar lo que se pretende (es un modelo probado), de allí que si nos referimos a una de las premisas del constructivismo, como la averiguación de los conocimientos previos de los estudiantes, para poder iniciar la asimilación e incorporación de nuevos conceptos, la propuesta incluye actividades y según sea el caso: recuperar, actualizar o generar estos conocimientos previos. El principal problema que detectamos los docentes que hemos impartido este tipo de asignaturas, son los conocimientos previos que cualquier alumno debe poseer para garantizar el éxito en la adquisición de los conceptos básicos del Cálculo, tanto Diferencial, como Integral, son pocos los alumnos que no saben “nada”, y está escrito entre comillas porque este juicio, sólo sirve para escudarnos muchos profesores y justificar los grandes índices de reprobación y ausentismo: los únicos alumnos que no saben nada son los que nunca llegaron hasta estas instancias o curso en cuestión.

Se pretende desarrollar una serie de actividades donde se pueda hacer un acercamiento al concepto de Límite, partiendo de situaciones cercanas o familiares al alumno de una manera visual e intuitiva, la cual se complementa o reafirma con la aplicación algorítmica y geométrica, siempre con la intención de que el alumno pueda resolver problemas de diferente disciplina e índole.

Desde siempre y en todos los niveles, es muy importante que el alumno ejercite la resolución de problemas, ya que es así, como el alumno re estructura su pensamiento y estimula su capacidad de análisis y planteamiento de los caminos alternativos de solución y además concebidos no como soluciones absolutas. En el bachillerato se han hecho grandes propuestas (V. los modelos educativos del CCH y Colegio de Bachilleres), y propósitos de la enseñanza de las matemáticas en este nivel, los cuales consideran los siguientes puntos:

- Formalizar los conocimientos que el estudiante ha venido adquiriendo en los niveles anteriores.
- Introducirlo a la vinculación del álgebra y la geometría.
- Fomentar el razonamiento lógico, la abstracción y la generalidad, que son cualidades intrínsecas de las matemáticas.
- Crear conciencia en el alumno de las bondades y generalidad de los métodos matemáticos que ofrece el Cálculo Diferencial e Integral para aplicarlos en otros campos y los cursos subsecuentes.

Aprendizajes esperados

El alumno podrá:

- Reconocer al cálculo como el estudio del cambio.
- Manejar el concepto fundamental de función y percatarse de que con éste aparece un nuevo objeto de estudio para cuyo tratamiento se requiere de nuevos procesos.
- Tener una primera aproximación a las nociones de función continua y límite de una función.
- Comprender los significados de la derivada y la integral de una función, tanto desde el punto de vista geométrico, como de herramientas para el estudio del cambio.
- Aplicar las nociones y procedimientos del cálculo a otras áreas es uno de los objetivos primordiales.

Procedimiento

La propuesta plantea desarrollar el tema de Límites y Razón de Cambio que trata de los contenidos siguientes: Cálculo Numérico de la Razón de Cambio e Interpretación gráfica de la Razón de Cambio Promedio, Razón de Cambio Instantánea y Límites.

El desarrollo de este tema se lleva a cabo en dos sesiones de dos horas cada una.

Conocimientos previos

- Determinar la pendiente de una recta.

Conocimientos involucrados

Los aprendizajes por parte de los alumnos del tema antes citado son:

- Obtener razones de cambio promedio, razón de cambio instantánea y límites.
- Utilizar la notación Δ .
- Interpretar la razón de cambio promedio como la pendiente de una recta secante que pasa por dos puntos dados.

Estrategia de enseñanza del tema

Para alcanzar estos aprendizajes en la planeación de esta propuesta metodológica se utilizan diferentes estrategias, técnicas y materiales didácticos.

Las estrategias empleadas son las directivas, educativas e instruccionales.

- Las estrategias directivas son aquellas que se utilizan para organizar el trabajo en el aula, como la dinámica de trabajo durante la clase y las normas que los alumnos deben conservar.
- Las estrategias educativas se utilizan para facilitar el aprendizaje del estudiante, dando claridad en la comunicación, considera los conocimientos previos y efectúa la retroalimentación.
- Las estrategias instruccionales se entienden como un conjunto de herramientas de trabajo, que facilitan el aprendizaje significativo, para que el profesor pueda desarrollar su quehacer al interior del salón de clases. Las estrategias instruccionales se dividen en: estrategias de enseñanza (las que utiliza el profesor) y de aprendizaje (las que utiliza el alumno).

Dentro de estas últimas estrategias de aprendizaje, se manejan para esta propuesta metodológica los objetivos, resúmenes, ilustraciones, pistas tipográficas, organizadores previos y *pretest*.

Como técnicas de dinámica grupal se emplean para esta propuesta metodológica el modelado, la expositiva, el interrogatorio dirigido, la lluvia de ideas, binas, equipos de 4 personas y lectura eficiente.

En lo que se refiere a los materiales didácticos utilizados están las lecturas, ejercicios, problemas propuestos, ilustraciones y organizadores previos.

Cabe mencionar que el tema en estudio se evaluará de la siguiente manera:

- Resolución de ejercicios tanto en clase como extra clase - evaluación diagnóstica y evaluación formativa.
- Desarrollo de una investigación de los sistemas numéricos.
- Realización de una actividad experimental.
- Aplicación de una evaluación sumativa a través de una prueba objetiva con diferentes tipos de reactivos -Falso-Verdadero, correspondencia o apareamiento, complementación y multireactivos

Todo esto con el propósito de proporcionar al estudiante una estrategia de estudio de la asignatura a través de estas técnicas y métodos de planeación.

A continuación se presentan las técnicas y estrategias de enseñanza y aprendizaje empleadas para cada sesión a fin de abordar los contenidos antes mencionados.

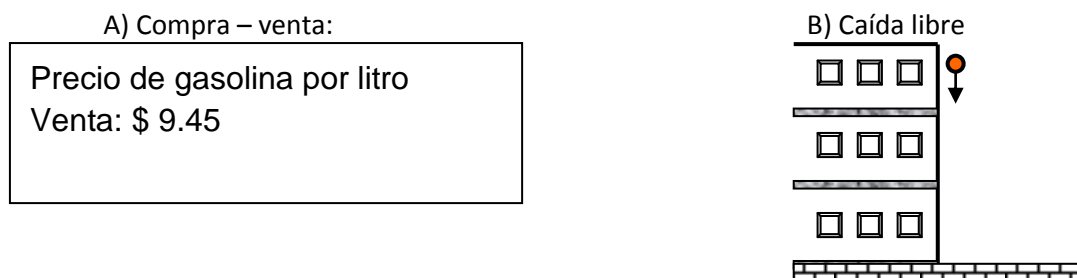
Materiales utilizados

Material impreso (prácticas dirigidas) colocados en línea par ser descargados por los alumnos, *Applet en Geogebra* y cuestionarios en línea. Las prácticas versarán en un contexto donde el alumno pueda estar familiarizado o le sea accesible reproducir las actividades sin requerir de instalaciones especiales o laboratorios.

²Cada vez que mencionamos “matemáticas” o “modelo matemático” tenemos la impresión de que el alumno se está imaginando algún tipo de fórmula o conjunto de símbolos. Pero no es lo que debemos entender por “matemáticas”. Existen varios tipos de representación matemática como veremos a continuación.

El objetivo de modelación matemática es el generar una representación matemática útil de una situación real. Tenemos a nuestra disposición tres tipos principales de representaciones, conectadas entre sí. A continuación se muestran, dentro de dos situaciones reales.

Situación real: Pensemos en dos situaciones diferentes. La compraventa de algún producto y la caída libre de un objeto. Ambas están ilustradas en los siguientes diagramas:

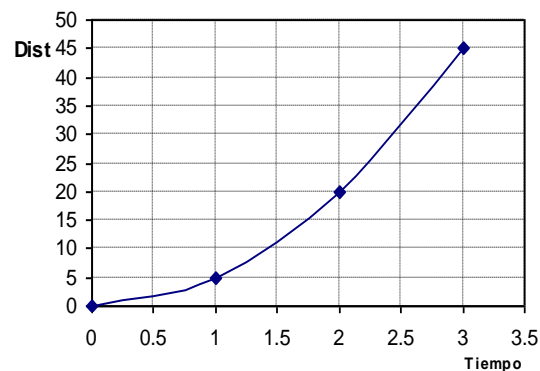
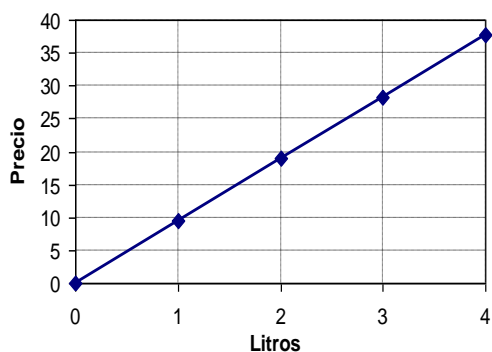


Representación numérica: No es necesario conocer una expresión matemática de la situación para poder representar su comportamiento. Podemos generar una tabla de valores relacionando algunas de las variables del sistema por otros medios. Cómo hacer esto, es uno de los objetivos de estas notas. En las dos situaciones anteriores .podríamos generar las siguientes tablas, con algunos cálculos sencillos (en el primer caso) y efectuando algún experimento apropiado (en el segundo caso):

Litros	Precio	Tiempo	Distancia
1	\$ 9.45	1	0
2	\$ 18.90	2	5
3	\$ 28.35	3	20
4	\$ 37.80	4	45

Representación gráfica: También podemos usar una gráfica para describir el comportamiento de la situación real. En los dos casos que estamos ilustrando tendríamos que:

² Mochón, Simón. *Modelos matemáticos para todos los niveles*, Cap. 3, pag. 13-18. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 2000.



Esta representación en matemáticas resulta por lo general como consecuencia de una representación numérica, pero hay instancias en las que esta representación se obtiene directamente. Muchos aparatos generan gráficas como salida para ser analizadas e interpretadas. Este es el caso de un osciloscopio o el trazo de un electrocardiograma.

Debido al uso creciente de las computadoras, hoy en día aparecen con gran frecuencia este tipo de representaciones gráficas (*software* de geometría dinámica). Por lo tanto, una actividad importante en el aula sería la de interpretar gráficas obtenidas de situaciones reales, o la de trazar la forma de la gráfica que esperaríamos en una situación real determinada. Por ejemplo, ¿cuál sería la gráfica de la temperatura como función del tiempo de un recipiente a temperatura ambiente que se introduce en un refrigerador? o ¿cuál sería la gráfica de la altura de una pelota como función del tiempo que se lanza hacia arriba?

Representación simbólica: Esta es la más conocida y usada. Consta de un conjunto de ecuaciones que relacionan las variables del fenómeno. En nuestros ejemplos tenemos que:

<p>Si</p> <p>K = Cantidad de litros de Gasolina</p> <p>P = Precio</p> <p>entonces</p> <p>$P = 9.45 K$</p>	<p>Si</p> <p>t = tiempo en segundos</p> <p>d = distancia en metros</p> <p>entonces</p> <p>$d = 5 t^2$</p>
--	--

Las ecuaciones que se estudian en la escuela son del tipo explícito, es decir, se relacionan las variables entre sí. Sin embargo, como veremos en estas notas, las fórmulas más sencillas de escribir para representar un fenómeno son del tipo local, ya sean recursivas o diferenciales (de estas últimas no hablaremos por no salirnos del objetivo principal de estas notas).

Por lo general, en matemáticas se ha dado preferencia a la representación simbólica, es decir, a fórmulas y a ecuaciones, dejando a un lado las otras dos representaciones. Sin embargo, las nuevas tecnologías han mostrado que las matemáticas deben abordarse con un punto de vista más amplio, dando importancia tanto a representaciones numéricas como gráficas.

Análisis de los resultados

Se presentarán en la réplica oral del evento (presentación en *Power Point*), después de aplicar los materiales hacia adentro de la estrategia y en aplicación metodológica.

Bibliografía y hemerografía

- Cruse B. Allan y Lehman. *Lecciones de Cálculo 1*, Introducción a la Derivada. Editorial Fondo Educativo Interamericano. México D. F. 1982.
- Cruse B. Allan y Lehman. *Lecciones de Cálculo 2*, Introducción a la Integral. Editorial Fondo Educativo Interamericano. México D. F. 1982.
- De Oteyza, De O. Elena (coordinadora), Argueta, V. Héctor de J.; Carrillo, H. Ángel M.; Díaz Barriga, Alejandro; Hernández, G. Carlos; Lam, O. Emma; Linares, A. María J.; Ramírez, F. Arturo. *Conocimientos fundamentales de matemáticas*, Facultad de Ciencias, UNAM, México D.F. 2008.
- Mochón, Simón. *Modelos matemáticos para todos los niveles*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 2000.
- Preisser, R. Rosario y Rosen, R. Patricio (coordinadores). *Cálculo Diferencial I*, Producto del Seminario Institucional de apoyo a la implantación de los programas actualizados de matemáticas. Colegio de Ciencias y Humanidades (UNAM), México 1998.
- Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics. 1° ed. en castellano por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. 2000.
- Santaló S. Marcelo y Carbonel C. Vicente. *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Editado por Manuel Porrúa. 1976.
- Stones, E. recopilación de varios autores. *Psicología de la Educación, Aprendizaje y Enseñanza*, Textos Básicos, Tomo I. 1ra. Ed. Madrid, Ediciones Morata. 1972.
- Wenzelburger, G. Elfriede. *Cálculo Diferencial*. México: Editorial Iberoamericana. 1993.
- Wenzelburger, G. Elfriede. *Cálculo Integral*. México: Editorial Iberoamericana. 1994.

Cibergrafía

- http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/LÍMITE_en_un_punto_continuidad/Indice_LÍMITE_punto_continuidad.htm, consultado el 15 de Marzo de 2010, 20:40 hrs (en este sitio se presenta un curso interactivo de CADI dentro del proyecto Descartes).
- <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/39-1-u-continuidad.html>, consultado el 15 de Marzo de 2010, 21:00 hrs (en este sitio se presentan apuntes de Límites).