

Herencia para completar cuadrados

Álvaro Escuadra Gallegos, Enrique Armando López Cruz
Silvia Karina López Valdez, Federico Navarro Torres y
Dulce Ma. Peralta González Rubio
Matemáticas, CCH-Sur

Introducción

Este trabajo es un reporte de la experiencia de aplicación de una estrategia de enseñanza cuya base didáctica es un taller para realizar en el aula. El objetivo central es que los estudiantes arriben al planteamiento y resolución de un problema que puede modelarse con ecuaciones cuadráticas. En esta actividad de aprendizaje, los estudiantes parten de sus conocimientos básicos sobre áreas —los cuales no rebasan el cuarto año de educación básica— y se aplican a representarlos gráfica y algebraicamente, hallan dos o más expresiones alternativas para la misma cantidad, lo cual les permite plantear la ecuación con base en el principio de equidad, después exploran métodos para resolverla, tanto gráfica como algebraicamente y terminan validando dichos métodos de representación y solución de ecuaciones cuadráticas.

Herencia para completar cuadrados

En la enseñanza del álgebra y la resolución de problemas, un tema que ha sido problemático en su aprendizaje, es el planteamiento y los métodos correspondientes para resolver ecuaciones cuadráticas.

Algunos problemas que enfrenta el estudiante para resolver una ecuación de segundo grado usando el *método de completar cuadrados* (trinomio cuadrado perfecto) es, en primer lugar, la falta de dominio algebraico en el manejo de productos de binomios y el reconocimiento de patrones de tales productos en un trinomio general. La base de conocimientos matemáticos sobre los que descansa la resolución de ecuaciones cuadráticas está relacionada con el principio de equidad, las operaciones básicas y el uso de literales para representar información que se desconoce y/o que varía; en segundo lugar, y no menos importante, la falta de referente gráfico-geométrico en la mente del estudiante con el que pueda relacionar el método de completar cuadrados.

Lo que busca este taller es ayudarle al estudiante a generar, comprender y construir, referentes en varias representaciones matemáticas: geométrica, gráfica, numérica y algebraica, esto es, tener un producto de su propia mente, algo en donde aterrizar la representación del problema para generar uno o varios métodos que les permitan operar con sus representaciones para resolver el problema; pero no sólo eso, se trata de ir más allá de la geometría y la gráfica, se busca arribar a una representación algebraica para desarrollar enseguida, métodos de operativización matemática, con los cuales generalice la solución de problemas de este tipo, así mismo, se pretende que el alumno descubra que ésta operativización algebraica es la forma más completa y poderosa para la representación y solución de este tipo de problemas. Cuando los estudiantes proceden de esta manera en la actividad de aprendizaje, se encaminan a la apropiación de un conocimiento matemático que tiene sentido para ellos, tanto en los procesos de representación simbólica con los cuales puede operar con mayor confianza en aras de

apropiarse de los algoritmos correspondientes.

La manera didáctica de lograr lo anterior consiste en que el diseño de la estrategia retoma conocimientos geométricos sobre la composición de áreas, buscando que los estudiantes hagan la correspondiente representación algebraica con base en tales representaciones geométricas para una situación concreta. Los alumnos obtienen de esta forma un modelo matemático que proceden a resolver, primero de manera visual con el apoyo geométrico (parte tangible -VISUAL-) y después manipulando las representaciones algebraicas (parte simbólica y abstracta).

Una de las dificultades de inicio, con la que tropiezan los alumnos cuando se encaran al texto, es la de enfrentarse a representar algebraicamente un problema concreto. Ya que logran una representación algebraica, deben buscar otra, que cumpla con las condiciones del problema, este trabajo tienen que hacerlo para que puedan vincularlas, utilizando el principio de equidad (igualdad), lo cual les permite llegar al planteamiento de una ecuación para resolver el problema.

La actividad presentada ha tenido tres momentos importantes en su diseño para llevarla al aula. Un primer momento se da cuando surge la idea de utilizar conocimientos y herramientas que los estudiantes ya tienen sobre la obtención de áreas de figuras geométricas, y sus representaciones algebraicas, dirigiendo su trabajo algebraico para resolver ecuaciones de segundo grado por el método de completar cuadrados, siempre con la representación gráfica (parte tangible) objetiva de lo que está haciendo. En un segundo momento nace la primera versión de la actividad que se aplica en uno de los grupos, de donde obtuvimos información para mejorarla. El tercer momento corresponde a la aplicación de la segunda versión de la actividad, en donde además de las correcciones se añaden ejercicios para la generalización del método de resolución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto.


Para construir la red semántica.

Un estudiante que tiene que resolver problemas escritos en palabras, debe primero, entender el problema, pero ¿qué significa y cómo se realiza tal comprensión en matemáticas?

En el texto, los alumnos deben identificar los elementos (cantidades, incógnitas, variables, etc.) que se mencionan, sus atributos y/o valores y las relaciones que juegan entre ellos. Una vez que los ha identificado, debe pasar a la simbolización algebraica de cada uno de ellos (análisis dimensional) y debe expresar con álgebra, todas las formas posibles de representar dichas relaciones, cuando tiene todo esto, se dice que ha construido la red semántica, en términos coloquiales, significa que ha comprendido el problema.

Se **contextualiza el problema**. El estudiante debe obtener el área de figuras geométricas regulares, obtener modelos matemáticos que representen las posibles áreas y transformar las figuras geométricas, manteniendo las áreas. En todo momento debe tener una representación algebraica de estas modificaciones, practicando y afinando la operatividad basado en el principio de equidad, respetando la jerarquía de las operaciones y aplicando operaciones inversas.

Herencia para completar cuadrados



Hugo y Paco recibieron como herencia, por parte de sus padres, un gran terreno. Como sus padres eran muy equitativos dejaron estipulado que se dividiera en dos partes con la misma superficie. El terreno de Hugo es rectangular y sus dimensiones son las siguientes: un lado mide x metros y el otro lado es del mismo tamaño más 2000 metros.

Bosqueja un esquema que represente el terreno de Hugo con las dimensiones dadas.

Esquema

Escribe una representación algebraica del área (A_H) del terreno de Hugo.

$A_H =$ _____

El terreno de Paco tiene forma de L, como se muestra en la figura.



Observa la figura del terreno de Paco y realiza en ella los trazos auxiliares que necesites para calcular las medidas de todos sus lados (sugerencia: secciona la figura de tal manera que puedas identificar un cuadrado y dos rectángulos iguales en ella).
Sombrea con colores diferentes las áreas compuestas por a^2 y x^2 .
Representa algebraicamente el área total del terreno de Paco.

$A_P =$ _____

Recuerda que el terreno de Paco tiene la misma área del terreno de su hermano. Escribe algebraicamente esta equivalencia de áreas.

j) _____

Con base en esta ecuación (j) obtén el valor de a .

$a =$ _____

Análisis dimensional. Realiza un bosquejo esquematizando el problema, haciendo un acercamiento a la representación algebraica del mismo. Identifica cada elemento como un objeto con sus atributos y valores y los simboliza. También identifica las relaciones que juegan entre ellos y los expresa simbólicamente. Plantea un cambio en la representación del problema, y se da cuenta de que siguen jugando los mismos objetos y las mismas relaciones, de tal suerte que tiene otra expresión algebraica que dice lo mismo, es decir, representa la misma cantidad. El diseño de la actividad induce al estudiante a que relacione, mediante la igualdad, las expresiones que representan lo mismo.

Escribe nuevamente la representación algebraica del área de este terreno compuesto por ax y x^2 sustituyendo el valor de a .

La representación algebraica del terreno de Paco es igual a la representación algebraica del terreno de Hugo? Es decir, ¿es cierta esta expresión: $A_H = A_P$?

SI ☐ NO ☐

Paco quiere un espacio más adecuado a sus necesidades para ello necesita completar el cuadrado, por lo tanto, necesita saber las medidas del terreno que requiere comprar.

¿Qué superficie tiene el terreno colindante que desea comprar?

$a^2 =$ _____

Sombrea con colores diferentes, en la figura del lado izquierdo, las áreas compuestas por a^2 , ax y x^2 .

Escribe una representación algebraica que represente la nueva área (A_{nue}) del nuevo terreno de Paco como la suma de sus partes, sustituyendo el valor de a .

Escribe una expresión algebraica que represente la medida de un lado del nuevo terreno completo, sustituyendo el valor de a .

Escribe una representación algebraica que represente la nueva área (A_{nue}) del nuevo terreno de Paco utilizando la expresión encontrada anteriormente (la expresión que representa el lado del terreno completo), sustituyendo el valor de a .

La expresión del inciso m) (escribela) _____ representa lo mismo que la expresión del inciso n) (escribela) _____, ambas representan _____

Escribe algebraicamente esta equivalencia de áreas

() $^2 =$ _____

El área de los terrenos que heredaron Hugo y Paco era de 39 ha, cada uno. (una hectárea (ha) equivale a la superficie de un terreno cuadrado de 100 m de lado).

Sustituye el valor expresado en metros cuadrados de las áreas A_H y A_P en las expresiones anteriores. Recuerda que Paco ya compró más terreno.

Una vez que tiene planteada la ecuación que representa la situación, se le pide calcular el perímetro del terreno para cercarlo, esto lo obliga a despejar la incógnita para conocer la longitud del lado del cuadrado y responder a lo que se le pide.

Para hallar el valor de la incógnita debe despejarla utilizando el principio de equidad con las operaciones inversas correspondientes.

→ Paco quiere cercar su terreno.

Si sabemos que el terreno de Paco es cuadrado y conocemos su área _____, ¿cuál es la medida de uno de sus lados? Escribe la representación algebraica _____

¿Cuántos metros de malla debe comprar para cercar su terreno?

¿Recuerdas el terreno del hermano de Paco? ¿Cuáles son las dimensiones de su terreno? Escribe la representación algebraica de su terreno, dibuja un boceto de su terreno y escribe sus medidas.

¿Recuerdas los terrenos de Hugo y Paco? ¿La forma que tenían? y ¿la relación que tenían sus dimensiones cuando les fueron heredados? y ¿Cómo Paco compró un terreno colindante al suyo para completar un cuadrado?

Imagina que la siguiente ecuación representa el área de un terreno en función de las medidas de sus lados y que queremos cercarlo.

$A = (x)(x + 14)$
 $A = x^2 + 14x$

Dibuja un boceto del terreno con sus medidas.

Para poder cercarlo, necesitamos resolver la ecuación de segundo grado y obtener la medida de ese lado "x" para _____

El área (A) del terreno si la conocemos, es un terreno de 1995 metros cuadrados, lo que queremos saber es cuánto mide x.

¿Cómo transformarías el terreno para que tuviera la forma del terreno de Paco manteniendo su superficie? ¿Cuánto debería medir "a" para que las superficies fueran las mismas?

¿Qué área tiene el terreno que tendríamos que comprar para completar el cuadrado?

Y, finalmente, ¿Cuál es la medida de ese lado "x"?

En esta etapa del taller se retoma el planteamiento inicial destacando los elementos claves para hallar las dimensiones: el área y el perímetro de los terrenos. Se trata de una recapitulación del problema y su planteamiento algebraico para concluir que un binomio al cuadrado es, gráficamente, el área de un cuadrado con lado $(x + a)$, la cual puede expresarse como un trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2ax + a^2$, donde el alumno es capaz de reconocer cada uno de los tres términos como las áreas parciales del cuadrado $(x + a)(x + a)$.

- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completando cuadrados.
- Si necesitas hacer dibujos u operaciones, hazlos en hojas anexas y entrégaslos
- Sé preciso(a) al indicar a que inciso se refieren tus procedimientos y bocetos.

a) $x^2 + 18x = 5395$

b) $x^2 + 24x = 7252$

c) $x^2 + 42x - 2263 = 0$

d) $x^2 - 765 = -36x$

e) $-x^2 - 11x = -2832$

f) $x^2 + 26x = c$

Finalmente se les plantean a los estudiantes algunos ejercicios similares, buscando con ello que reconozcan el patrón y que formulen la generalización de la solución a este tipo de problemas, explicando en qué consiste.

Resultados

La evaluación se realizó mediante una rúbrica que cubrió las categorías de logro: completo, suficiente, parcial y deficiente. El 80% de los estudiantes obtuvo un logro suficiente, del 20% restante, un 10% tuvo un logro completo, 5% logro parcial y el otro 5% no entendió el problema, con un logro deficiente.

A manera de conclusiones

De la primera versión a la segunda hubo cambios significativos y una mejoría notable, tanto en la resolución de la actividad como en la apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

Bibliografía

- Al Khwarizmi, *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Traducción edición y notas de Friederic Rosen (reimpreso en 1986). Hildesheim: G. Olms verlag.
- Altarejos, F. y Naval, C. Filosofía de la educación. Pamplona, España: EUNSA, Ediciones Universidad de Navarra, S. 2004
- Charles D Miller, Vern E Heeren. *Matemática: Razonamiento y aplicaciones*. Editorial Pearson. 2006.
- Delors, J. Los cuatro pilares de la educación. En *La educación encierra un tesoro*. México. UNESCO. 1997.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1965.
- Pozo, J.I. y Monereo, C. *El aprendizaje estratégico*. Madrid: Aula XXI Santillana, 1999.