Las ecuaciones cuadráticas de Al-Juarizmi

Silvia Karina López Valdez
Ernesto Márquez Fragoso
Fabiola Medina Cabrera
Carlos Federico Navarro Torres
Matemáticas I – IV. CCH, Sur

Introducción

La civilización islámica produjo, aproximadamente entre 750 d. C. y 1450 d. C., una sucesión de científicos, astrónomos, geógrafos y matemáticos, desde el inventor del álgebra hasta el descubridor de la solución de las ecuaciones cuadráticas. La lista es enorme y en ella hay algunos personajes muy conocidos, y que otros se mantienen anónimos. Uno de los mayores avances se encuentra en la obra de Al Jauarizmi, quien escribió una obra matemática llamada *Al Yabrwa Al Muqábala* (820 d. C.), de cuyo título se deriva el nombre de "álgebra". Este libro puede considerarse el primero escrito sobre el tema del álgebra. Entre los logros que Al Juarizmi dejó para la posteridad están: soluciones a ecuaciones de primero y segundo grado con una sola incógnita, utilizando métodos tanto algebraicos como geométricos y un método de multiplicación y división algebraicas.

Al Juarizmi definió tres tipos de cantidades: números simples, como 5, 17 y 131; la raíz, que es la cantidad desconocida, *shai* en árabe, que significa "cosa". Sin embargo, las traducciones hechas en Toledo (el centro de la traducción de libros árabes), debido a la ausencia del sonido "sh" en el idioma español, debieron utilizar otra letra más adecuada. Ellos eligieron la "x", lo que podría explicar por qué Don Quixote a veces se pronuncia "Don Quishote" y "Riqueza" (mal), o el cuadrado de la raíz (x^2).

Este tipo de hechos y, particularmente, la genial relación entre dos ramas de las matemáticas para nosotros bien delimitadas —el álgebra y la geometría—, pero para ellos una sola, hacen que puedan ser rescatados algunos elementos para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas con explicaciones algebraicas basadas en demostraciones y construcciones geométricas.

Objetivos

Esta actividad está diseñada para practicar las ecuaciones cuadráticas. El objetivo es abordar este tipo de ecuaciones desde dos distintas perspectivas: la geométrica y algebraica. Con esto se espera tener una perspectiva más amplia sobre esta temática.

Aprendizajes esperados

Lo que busca este taller es ayudarle al estudiante a generar, comprender y construir referentes en varias representaciones matemáticas: geométrica, gráfica, numérica y algebraica, esto es, tener un producto de su propia mente, "algo" donde aterrizar la representación del problema para generar uno o varios métodos que le permita operar con sus representaciones para resolver el problema. Pero no sólo eso: se trata de ir más allá de la geometría y la gráfica, se busca arribar a una representación algebraica para desarrollar enseguida, métodos de "operativización" matemática, con los cuales generalice la solución de problemas de este tipo. Asimismo, se pretende que el alumno descubra que esta "operativización" algebraica es la forma más completa y poderosa para la representación y solución de este tipo de problemas. Cuando los estudiantes proceden de esta manera en la actividad de aprendizaje, se encaminan a la apropiación de un conocimiento matemático que tiene sentido para ellos, tanto en los procesos de representación simbólica con los cuales puede operar con mayor confianza en aras de apropiarse de los algoritmos correspondientes.

Procedimiento

Las ecuaciones cuadráticas como $x^2 + 36x = 765$ suman términos que representan magnitudes del mismo tipo, por ejemplo superficies. Es así que podemos representar el término cuadrático como un cuadrado de lado x, y el término lineal como un rectángulo cuyos lados midan 36 y x.

I. *Representa*. Dibuja las figuras descritas en el párrafo anterior. Colorea el cuadrado en rojo y el rectángulo en amarillo. No olvides escribir las magnitudes de cada lado, y en el centro la superficie que ocupan.

Estas figuras tienen una superficie que está representada en términos algebraicos como x^2 y $36x$ (unidades cuadráticas, u^2). Así, si las sumamos, tendríamos una superficie total de $765u^2$. Ahora, para saber cuál es el valor de nuestra variable x en esta ecuación, prepararemos los siguientes materiales:

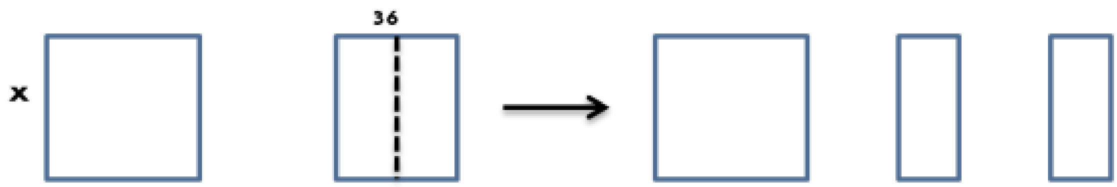
- Acetatos de colores (rojo, azul y amarillo)
- Hojas blancas tamaño carta
- Plumón indeleble
- Escuadras y exacto (cutter)
- Tabla de corte

2. *Colores cuadrados*. Sigue las instrucciones y *dibuja* la figura resultante en cada espacio.

Corta el cuadrado más grande que puedas con la hoja carta. Cada lado mide lo que la base de la hoja.	
Ajusta el acetato amarillo al tamaño de la hoja carta y corta en una esquina un cuadradito de 7 cm de lado.	
El acetato amarillo toma forma de L y se convierte en un hexágono irregular. Ubica en forma interna el ángulo convexo y prolonga sus lados con rectas trazadas con el plumón indeleble para formar 3 cuadriláteros.	
Recorta un cuadradito del acetato azul de 7 cm de lado.	
Ubica el cuadrado en el acetato amarillo y recorta uno congruente en color rojo.	

3. Ál-gebra. ¡Ahora sí!, con estos materiales averigüemos el valor de la variable x. Recuerda que la ecuación que estamos trabajando es $\mathbf{x^2 + 36x = 765}$.

a) Retoma las figuras del punto 1: un cuadrado de lado x, y un rectángulo cuyos lados midan 36 y x. Toma estas figuras y cortando el rectángulo en dos rectángulos menores, señala el valor de sus lados y la superficie de las figuras. Escribe estas medidas en el siguiente diagrama:



b) ¡Toma tus figuras en acetato! Ubica la figura amarilla encima de la hoja carta.

c) Toma el cuadrado rojo y ajústalo encima del amarillo. Si tomamos en cuenta que cada término en la ecuación $x^2 + 36x = 765$ representa un cuadrilátero, escribe sobre la hoja blanca las medidas de los lados y el valor de la superficie de los rectángulos amarillos y del cuadrado naranja.

d) Basados en la ecuación, los dos primeros términos sumados (figuras amarillas y naranja) representan_____ u^2.

e) Para conocer el valor de la incógnita x, completa la figura con el cuadrado azul. Escribe en la hoja el valor de sus lados y su superficie.

f) Al formar un gran cuadrado tricolor podemos darnos cuenta de todas sus medidas:
¿Cuánto mide el gran cuadrado si a la superficie inicial (inciso d) se le aumentó el cuadrado azul?

Superficie total:_______________ Lado del gran cuadrado:________________

Conociendo el valor de los lados del gran cuadrado y del cuadrado azul, ¿cuál es el valor de la variable x?

$$x = \_\_\_\_\_$$

Comprueba tu respuesta sustituyendo este valor en la ecuación original, comprobando la igualdad.

4. Ahora, para terminar escribe un algoritmo[1] para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + bx = c$.

Emplea los pasos que seguiste para determinar el valor de en el ejercicio.

Discute los resultados con tus compañeros y lleguen a conclusiones generales respecto a la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante el método de completar cuadrados.

Resultados

Una de las dificultades de inicio, con que tropiezan los alumnos cuando se encaran al texto, es la de enfrentarse a representar algebraicamente un problema concreto. Ya que logran una representación algebraica, deben buscar otra que cumpla con las condiciones del problema; este trabajo tienen que hacerlo para que puedan vincularlas, utilizando el principio de equidad (igualdad), lo cual les permite llegar al planteamiento de una ecuación para resolver el problema.

La actividad presentada ha tenido tres momentos importantes en su diseño para llevarla al aula. Un primer momento se da cuando surge la idea de utilizar conocimientos y herramientas que los estudiantes ya tienen sobre la obtención de áreas de figuras geométricas, y sus representaciones algebraicas, dirigiendo su trabajo algebraico para resolver ecuaciones de segundo grado por el método de

[1] Algoritmo: conjunto de instrucciones ordenadas y definidas para realizar una actividad.

completar cuadrados, siempre con la representación gráfica (parte tangible) objetiva de lo que está haciendo. En un segundo momento nace la primera versión de la actividad que se aplica en uno de los grupos, de donde obtuvimos información para mejorarla. El tercer momento corresponde a la aplicación de la segunda versión de la actividad, en donde además de las correcciones se añaden ejercicios para la generalización del método de resolución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto.

Análisis

Un estudiante que tiene que resolver problemas escritos en palabras, debe primero entender el problema, pero ¿qué significa y cómo se realiza tal comprensión en matemáticas?

En el texto, los alumnos deben identificar los elementos (cantidades, incógnitas, variables, etc.) que se mencionan, sus atributos y/o valores y las relaciones que juegan entre ellos. Una vez que los ha identificado, debe pasar a la simbolización algebraica de cada uno de ellos (análisis dimensional) y debe expresar con álgebra, todas las formas posibles de representar dichas relaciones. Cuando tiene todo esto, se dice que ha construido la red semántica; en términos coloquiales, significa que ha comprendido el problema.

Se *contextualiza el problema*. El estudiante debe obtener el área de figuras geométricas regulares, obtener modelos matemáticos que representen las posibles áreas y transformar las figuras geométricas, manteniendo las áreas. En todo momento debe tener una representación algebraica de estas modificaciones, practicando y afinando la operatividad basado en el principio de equidad, respetando la jerarquía de las operaciones y aplicando operaciones inversas.

Análisis dimensional. Realiza un bosquejo esquematizando el problema, haciendo un acercamiento a la representación algebraica del mismo. Identifica cada elemento como un objeto con sus atributos y valores y los simboliza. También identifica las relaciones que juegan entre ellos y los expresa simbólicamente. Plantea un cambio en la representación del problema, y se da cuenta de que siguen jugando los mismos objetos y las mismas relaciones, de tal suerte que tiene otra expresión algebraica que dice lo mismo, es decir, representa la misma cantidad. El diseño de la actividad induce al estudiante a que relacione, mediante la igualdad, las expresiones que representan lo mismo.

Una vez que tiene planteada la ecuación que representa la situación, se le pide calcular el perímetro del terreno para cercarlo, esto lo obliga a despejar la incógnita para conocer la longitud del lado del cuadrado y responder a lo que se le pide.

Para hallar el valor de la incógnita debe despejarla utilizando el principio de equidad con las operaciones inversas correspondientes.

Finalmente se les plantean a los estudiantes algunos ejercicios similares, buscando con ello que reconozcan el patrón y que formulen la generalización de la solución a este tipo de problemas, explicando en qué consiste.

Interpretación

La evaluación se realizó mediante una rúbrica que cubrió las categorías de logro: completo, suficiente, parcial y deficiente. El 80% de los estudiantes obtuvo un logro suficiente; del 20% restante, 10% tuvo un logro completo, 5% logro parcial y el otro 5% no entendió el problema, con un logro deficiente.

De la primera versión a la segunda hubo cambios significativos y una mejoría notable, tanto en la resolución de la actividad como en la apropiación del conocimiento por parte de los alumnos.

Bibliografía

- al-Jwarizmi, M. i.-M. (2009). *El libro del Álgebra*. (trad. R. Moreno Castillo,) España, Nivola.
- Shanan Idrisi, Z. (6 de enero de 2014). *Un vistazo a la contribución del Islam a las Matemáticas*. Recuperado el 30 de marzo de 2014, de http://www.islamreligion.com/es/articles/4761/